

Оглавление

Предисловие	9
1. Основные определения и формулы. Интегральные преобразования	10
1.1. Предварительные замечания	10
1.1-1. Некоторые определения	10
1.1-2. Структура решений линейных интегральных уравнений	11
1.1-3. Интегральные преобразования	12
1.1-4. Вычеты. Формулы для вычислений	12
1.1-5. Лемма Жордана	13
1.2. Преобразование Лапласа	14
1.2-1. Определение. Формула обращения	14
1.2-2. Обращение рациональных функций	15
1.2-3. Теорема о свертке для преобразования Лапласа	15
1.2-4. Предельные теоремы	15
1.2-5. Основные свойства преобразования Лапласа	16
1.2-6. Формула Поста–Уилдера	16
1.3. Преобразование Меллина	17
1.3-1. Определение. Формула обращения	17
1.3-2. Основные свойства преобразования Меллина	17
1.3-3. Связь преобразований Меллина, Лапласа и Фурье	18
1.4. Преобразование Фурье	18
1.4-1. Определение. Формула обращения	18
1.4-2. Несимметричная форма преобразования	19
1.4-3. Альтернативное преобразование Фурье	19
1.4-4. Теорема о свертке для преобразования Фурье	20
1.5. Синус- и косинус-преобразования Фурье	20
1.5-1. Косинус-преобразование Фурье	20
1.5-2. Синус-преобразование Фурье	21
1.6. Другие интегральные преобразования	21
1.6-1. Преобразование Ханкеля	21
1.6-2. Преобразование Мейера	22
1.6-3. Преобразование Конторовича–Лебедева	22
1.6-4. Y -преобразование и другие преобразования	22
2. Методы решения линейных уравнений вида $\int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x)$	25
2.1. Уравнения Вольтерра первого рода	25
2.1-1. Структура уравнений. Классы функций и ядер	25
2.1-2. Существование и единственность решения	26
2.2. Уравнения с вырожденным ядром: $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$	26
2.2-1. Уравнения с ядром $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + g_2(x)h_2(t)$	26
2.2-2. Уравнения с вырожденным ядром общего вида	27
2.3. Сведение уравнений Вольтерра первого рода к уравнениям Вольтерра второго рода	28
2.3-1. Первый способ	28
2.3-2. Второй способ	28
2.4. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$	29
2.4-1. Метод решения, основанный на преобразовании Лапласа	29
2.4-2. Случай рационального образа решения	30
2.4-3. Представление решения в виде композиции	30
2.4-4. Использование вспомогательного уравнения	31
2.4-5. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям	32
2.4-6. Связь уравнений Вольтерра и Винера–Хопфа	33

2.5. Метод дробного дифференцирования	33
2.5-1. Определение дробных интегралов	33
2.5-2. Определение дробных производных	34
2.5-3. Основные свойства	35
2.5-4. Решение обобщенного уравнения Абеля	35
2.6. Уравнения с ядрами, имеющими слабую особенность	36
2.6-1. Метод преобразования ядра	36
2.6-2. Ядро с логарифмической особенностью	37
2.7. Метод квадратур	38
2.7-1. Квадратурные формулы	38
2.7-2. Общая схема метода	39
2.7-3. Алгоритм на основе формулы трапеций	40
2.7-4. Алгоритм для уравнения с вырожденным ядром	40
2.8. Уравнения с бесконечным пределом интегрирования	41
2.8-1. Уравнение с переменным нижним пределом интегрирования	41
2.8-2. Приведение к уравнению Винера–Хопфа первого рода	42
3. Методы решения линейных уравнений вида $y(x) - \int_a^x K(x, t)y(t) dt = f(x)$	43
3.1. Интегральные уравнения Вольтерра второго рода	43
3.1-1. Предварительные замечания. Уравнения для резольвенты	43
3.1-2. Связь между решениями интегральных уравнений	44
3.2. Уравнения с вырожденным ядром: $K(x, t) = g_1(x)h_1(t) + \dots + g_n(x)h_n(t)$	44
3.2-1. Уравнения с ядром $K(x, t) = \varphi(x) + \psi(x)(x - t)$	44
3.2-2. Уравнения с ядром $K(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)(t - x)$	45
3.2-3. Уравнения с ядром $K(x, t) = \sum_{m=1}^n \varphi_m(x)(x - t)^{m-1}$	46
3.2-4. Уравнения с ядром $K(x, t) = \sum_{m=1}^n \varphi_m(t)(t - x)^{m-1}$	46
3.2-5. Уравнения с вырожденным ядром общего вида	47
3.3. Уравнения с разностным ядром: $K(x, t) = K(x - t)$	48
3.3-1. Метод решения, основанный на преобразовании Лапласа	48
3.3-2. Метод, основанный на решении вспомогательного уравнения	50
3.3-3. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям	50
3.3-4. Приведение к уравнению Винера–Хопфа второго рода	51
3.3-5. Метод дробного интегрирования для уравнения Абеля	51
3.3-6. Системы интегральных уравнений Вольтерра	53
3.4. Операторные методы решения линейных интегральных уравнений	53
3.4-1. Использование решения «укороченного» уравнения	53
3.4-2. Использование вспомогательного уравнения второго рода	54
3.4-3. Метод решения «квадратных» операторных уравнений	56
3.4-4. Решение операторных уравнений полиномиального вида	57
3.4-5. Некоторые обобщения	58
3.5. Построение решений уравнений со специальной правой частью	58
3.5-1. Общая схема	58
3.5-2. Порождающая функция экспоненциального вида	59
3.5-3. Порождающая функция степенного вида	61
3.5-4. Порождающая функция, содержащая синусы или косинусы	62
3.6. Метод модельных решений	63
3.6-1. Предварительные замечания	63
3.6-2. Описание метода	64
3.6-3. Модельное решение для экспоненциальной правой части	64
3.6-4. Модельное решение для степенной правой части	66
3.6-5. Модельное решение для синусоидальной правой части	67
3.6-6. Модельное решение для косинусоидальной правой части	67
3.6-7. Некоторые обобщения	67
3.7. Метод дифференцирования интегральных уравнений	68
3.7-1. Ядро содержит сумму экспонент	68
3.7-2. Ядро содержит сумму гиперболических функций	69
3.7-3. Ядро содержит сумму тригонометрических функций	70
3.7-4. Ядро содержит комбинации различных функций	71

3.8. Сведение уравнений Вольтерра второго рода к уравнениям Вольтерра первого рода	71
3.8-1. Первый способ	72
3.8-2. Второй способ	72
3.9. Метод последовательных приближений	72
3.9-1. Общая схема	72
3.9-2. Формула для резольвенты	73
3.10. Метод квадратур	74
3.10-1. Общая схема метода	74
3.10-2. Применение формулы трапеций	75
3.10-3. Случай вырожденного ядра	75
3.11. Уравнения с бесконечным пределом интегрирования	75
3.11-1. Случай переменного нижнего предела интегрирования	76
3.11-2. Приведение к уравнению Винера–Хопфа второго рода	77
4. Методы решения линейных уравнений вида $\int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x)$	78
4.1. Предварительные замечания	78
4.1-1. Интегральные уравнения Фредгольма первого рода	78
4.1-2. Интегральные уравнения первого рода со слабой особенностью	78
4.1-3. Интегральные уравнения типа свертки	79
4.1-4. Парные интегральные уравнения первого рода	80
4.2. Метод Крейна	80
4.2-1. Основное и вспомогательное уравнения	80
4.2-2. Решение основного уравнения	81
4.3. Метод интегральных преобразований	82
4.3-1. Уравнение с разностным ядром на всей оси	82
4.3-2. Уравнения с ядром $K(x, t) = K(x/t)$ на полуоси	82
4.3-3. Уравнение с ядром $K(x, t) = K(xt)$ и его обобщения	82
4.4. Задача Римана для действительной оси	83
4.4-1. Связь интеграла Фурье с интегралом типа Коши	84
4.4-2. Односторонние интегралы Фурье	85
4.4-3. Теорема об аналитическом продолжении и теорема Лиувилля	86
4.4-4. Краевая задача Римана	87
4.4-5. Задача Римана с рациональными коэффициентами	93
4.4-6. Исключительные случаи. Однородная задача	94
4.4-7. Исключительные случаи. Неоднородная задача	96
4.5. Метод Карлемана для уравнений типа свертки первого рода	99
4.5-1. Уравнение Винера–Хопфа первого рода	99
4.5-2. Интегральные уравнения с двумя ядрами первого рода	99
4.6. Парные интегральные уравнения первого рода	102
4.6-1. Метод Карлемана для уравнения с разностными ядрами	102
4.6-2. Точные решения некоторых парных уравнений первого рода	104
4.6-3. Приведение парных уравнений к уравнению Фредгольма	105
4.7. Асимптотические методы решения уравнений с логарифмической особенностью	109
4.7-1. Предварительные замечания	109
4.7-2. Решение при больших значениях характерного параметра	109
4.7-3. Решение при малых значениях характерного параметра	110
4.7-4. Интегральные уравнения теории упругости	112
4.8. Методы регуляризации	112
4.8-1. Метод регуляризации Лаврентьева	112
4.8-2. Метод регуляризации Тихонова	113
5. Методы решения линейных уравнений вида $y(x) - \int_a^b K(x, t)y(t) dt = f(x)$	114
5.1. Предварительные замечания	114
5.1-1. Уравнения Фредгольма и уравнения со слабой особенностью	114
5.1-2. Структура решений	115
5.1-3. Интегральные уравнения типа свертки второго рода	115
5.1-4. Парные интегральные уравнения второго рода	115

5.2. Уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром	116
5.2-1. Простейшее вырожденное ядро	116
5.2-2. Вырожденное ядро в общем случае	117
5.3. Решение в виде ряда по степеням параметра. Метод последовательных приближений	120
5.3-1. Итерированные ядра	120
5.3-2. Метод последовательных приближений	120
5.3-3. Построение резольвенты	121
5.3-4. Ортогональные ядра	122
5.4. Метод определителей Фредгольма	123
5.4-1. Формула для резольвенты	123
5.4-2. Рекуррентные соотношения	124
5.5. Теоремы и альтернатива Фредгольма	125
5.5-1. Теоремы Фредгольма	125
5.5-2. Альтернатива Фредгольма	125
5.6. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с симметричными ядрами	125
5.6-1. Характеристические числа и собственные функции	125
5.6-2. Билинейный ряд	127
5.6-3. Теорема Гильберта–Шмидта	128
5.6-4. Билинейные ряды итерированных ядер	128
5.6-5. Решение неоднородного уравнения	129
5.6-6. Альтернатива Фредгольма для симметричных уравнений	130
5.6-7. Резольвента симметричного ядра	130
5.6-8. Экстремальные свойства характеристических чисел	131
5.6-9. Интегральные уравнения, приводимые к симметричным	131
5.6-10. Кососимметричное интегральное уравнение	132
5.7. Операторный метод решения интегральных уравнений второго рода	132
5.7-1. Простейшая схема	132
5.7-2. Решение уравнений второго рода на полуоси	132
5.8. Метод интегральных преобразований и метод модельных решений	133
5.8-1. Уравнение с разностным ядром на всей оси	133
5.8-2. Уравнение с ядром $K(x, t) = t^{-1} Q(x/t)$ на полуоси	135
5.8-3. Уравнение с ядром $K(x, t) = t^\beta Q(xt)$ на полуоси	136
5.8-4. Метод модельных решений для уравнений на всей оси	137
5.9. Метод Карлемана для интегральных уравнений типа свертки второго рода	137
5.9-1. Уравнение Винера–Хопфа второго рода	137
5.9-2. Интегральное уравнение второго рода с двумя ядрами	141
5.9-3. Уравнения типа свертки с переменным пределом интегрирования	146
5.9-4. Парное уравнение типа свертки второго рода	148
5.10. Метод Винера–Хопфа	149
5.10-1. Некоторые замечания	149
5.10-2. Однородное уравнение Винера–Хопфа второго рода	151
5.10-3. Общая схема метода. Проблема факторизации	154
5.10-4. Неоднородное уравнение Винера–Хопфа второго рода	156
5.10-5. Исключительный случай уравнения Винера–Хопфа второго рода	157
5.11. Метод Крейна для уравнения Винера–Хопфа	158
5.11-1. Некоторые замечания. Проблема факторизации	158
5.11-2. Решение уравнения Винера–Хопфа второго рода	159
5.11-3. Формула Хопфа–Фока	161
5.12. Методы решения уравнений с разностным ядром на конечном отрезке	162
5.12-1. Метод Крейна	162
5.12-2. Ядра с рациональными преобразованиями Фурье	163
5.12-3. Сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям	164
5.13. Метод замены ядра вырожденным	166
5.13-1. Аппроксимация ядра	166
5.13-2. Приближенное решение	167

5.14. Метод Бейтмена	168
5.14-1. Общая схема метода	168
5.14-2. Некоторые частные случаи	169
5.15. Метод коллокации	171
5.15-1. Общие замечания	171
5.15-2. Приближенное решение	172
5.15-3. Собственные функции уравнения	173
5.16. Метод наименьших квадратов	174
5.16-1. Описание метода	174
5.16-2. Построение собственных функций	175
5.17. Метод Бубнова–Галеркина	176
5.17-1. Описание метода	176
5.17-2. Характеристические числа уравнения	176
5.18. Метод квадратур	178
5.18-1. Общая схема для уравнений Фредгольма второго рода	178
5.18-2. Построение собственных функций	179
5.18-3. Особенности применения квадратурных формул	179
5.19. Системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода	180
5.19-1. Некоторые замечания	180
5.19-2. Метод преобразования системы уравнений в одно уравнение	181
5.20. Метод регуляризации для некоторых уравнений второго рода	181
5.20-1. Основное уравнение и теоремы Нётера	181
5.20-2. Регуляризирующие операторы	182
5.20-3. Метод регуляризации	183
6. Методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода	185
6.1. Предварительные замечания	185
6.1-1. Интегральные уравнения первого рода с ядром Коши	185
6.1-2. Интегральные уравнения первого рода с ядром Гильберта	185
6.2. Интеграл типа Коши	186
6.2-1. Определение интеграла типа Коши	186
6.2-2. Условие Гёльдера	187
6.2-3. Главное значение сингулярного интеграла	187
6.2-4. Многозначные функции	189
6.2-5. Главное значение сингулярного криволинейного интеграла	190
6.2-6. Формула перестановки Пуанкаре–Бертрана	192
6.3. Краевая задача Римана	192
6.3-1. Теорема об аналитическом продолжении и теорема Лиувилля	192
6.3-2. Интерполяционный полином Эрмита	194
6.3-3. Понятие индекса	194
6.3-4. Постановка задачи Римана	196
6.3-5. Решение однородной задачи	198
6.3-6. Решение неоднородной задачи	199
6.3-7. Задача Римана с рациональными коэффициентами	201
6.3-8. Задача Римана для действительной оси	204
6.3-9. Исключительные случаи задачи Римана	206
6.3-10. Задача Римана для многосвязной области	210
6.3-11. Случаи разрывных коэффициентов и разомкнутых контуров	213
6.3-12. Краевая задача Гильберта	213
6.4. Сингулярные интегральные уравнения первого рода	214
6.4-1. Простейшее уравнение с ядром Коши	214
6.4-2. Уравнение с ядром Коши на действительной оси	214
6.4-3. Уравнение первого рода на конечном отрезке	215
6.4-4. Общее уравнение первого рода с ядром Коши	216
6.4-5. Уравнения первого рода с ядром Гильберта	217
6.5. Метод Мультиппа–Каландия	218
6.5-1. Решение, не ограниченное на концах отрезка	218
6.5-2. Решение, ограниченное на одном конце отрезка	220
6.5-3. Решение, ограниченное на обоих концах отрезка	221

7. Методы решения полных сингулярных интегральных уравнений	222
7.1. Некоторые замечания	222
7.1-1. Интегральные уравнения с ядром Коши	222
7.1-2. Интегральные уравнения с ядром Гильберта	223
7.1-3. Об уравнениях Фредгольма второго рода на контуре	224
7.2. Метод Карлемана для характеристических уравнений	226
7.2-1. Характеристическое уравнение с ядром Коши	226
7.2-2. Уравнение, союзное с характеристическим	229
7.2-3. Характеристическое уравнение на действительной оси	230
7.2-4. Исключительный случай характеристического уравнения	232
7.2-5. Характеристическое уравнение с ядром Гильберта	234
7.2-6. Уравнение Трикоми	234
7.3. Полные сингулярные интегральные уравнения, разрешаемые в замкнутой форме	235
7.3-1. Замкнутое решение при постоянных коэффициентах	235
7.3-2. Замкнутое решение в общем случае	236
7.4. Метод регуляризации для полных сингулярных интегральных уравнений	238
7.4-1. Некоторые свойства сингулярных операторов	238
7.4-2. Регуляризирующий оператор	240
7.4-3. Способы регуляризации слева и справа	241
7.4-4. Проблема равносильной регуляризации	242
7.4-5. Теоремы Нётера	243
7.4-6. Способ регуляризации Карлемана–Векуа	244
7.4-7. Регуляризация в исключительных случаях	246
7.4-8. Полное уравнение с ядром Гильберта	246
8. Методы решения нелинейных интегральных уравнений	250
8.1. Некоторые определения и замечания	250
8.1-1. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра	250
8.1-2. Нелинейные уравнения с постоянными пределами интегрирования	251
8.2. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра	252
8.2-1. Метод интегральных преобразований	252
8.2-2. Метод дифференцирования интегральных уравнений	253
8.2-3. Метод последовательных приближений	254
8.2-4. Метод Ньютона–Канторовича	256
8.2-5. Метод коллокации	258
8.2-6. Метод квадратур	258
8.3. Уравнения с постоянными пределами интегрирования	260
8.3-1. Нелинейные уравнения с вырожденными ядрами	260
8.3-2. Метод интегральных преобразований	262
8.3-3. Метод дифференцирования интегральных уравнений	263
8.3-4. Метод последовательных приближений	264
8.3-5. Метод Ньютона–Канторовича	264
8.3-6. Метод квадратур	267
8.3-7. Метод регуляризации Тихонова	267
Список литературы	269